BAB IX

MEKANIKA BENDA TEGAR

Benda tegar adalah sistem benda yang terdiri dari sistem-sistem benda titik yang tak hingga banyaknya dan jika ada benda yang bekerja padanya jarak antara titik anggota sistem selalu tetap. Jadi perbedaan antara benda titik dan benda tegar adalah adanya perubahan jarak pada sistem benda titik yang mengalami gaya.

Gerak sistem benda titik terdiri atas dua macam :

- Gerak pusat massa
- Gerak relatif

Gerak relatif yang sederhana adalah memilih pusat massa sebagai pusat sistem koordinat, sedangkan gerak relatif yang mungkin terjadi adalah gerak benda tegar dalam sistem koordinat pusat massa adalah roatsi terhadap pusat massa dalam keadaan diam

Gerak benda tegar tirdiri dari :

- Gerak pusat massa yaitu bila lintasan semua titik tersebut sejajar disebut translasi
- Gerak rotasi terhadap pusat massa yaitu bila lintasan semua titik dari benda tersebut berbentuk lingkaran yang pusatnya pada sumbu putar yang melalui pusat massa.

9.1. Kinematika Rotasi

sebuah benda berotasi terhadap sumbu putar berarti setiap titik pada sumbu tersebut akan melakukan gerak melingkar dengan pusat lingkaran berada pada sumbu putar.

Disini terdapat analog antara besaran besaran rotasi dengan translasi yaitu :

a. besaran sudut putar θ, analog dengan pergeseran x
b. kecepatan angular ω, analog dengan kecepatan linier v
c. percepatan angular α, analog dengan percepatan a

Hubungan antara besaran-besaran translasi dan rotasi adalah :

$$s = \theta \cdot r$$
$$v_T = \omega \cdot r$$
$$a_T = \alpha \cdot r$$

dimana :

r adalah jarak titik kesumbu putar
T adalah simbol untuk arah tangensial

Besaran-besaran kinematika rotasi

$\theta = \omega .t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0.t + \frac{1}{2}\alpha.t^2$

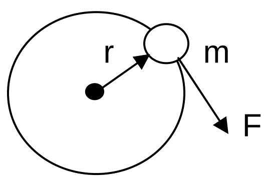
$$\omega = \omega_0 + \alpha .t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2.\alpha .\Delta t$$

Macam-macam gerak rotasi :

- gerak melingkar beraturan : ω konstan atau $\alpha = 0$
- gerak melingkar berubah beraturan : $\alpha \neq 0$, $\alpha > 0$, dipercepat, kalau : $\alpha<0$ berati diperlambat

Hubungan torsi dan kecepatan sudut



Perhatikan gambar diatas, sebuah partikel dengan massa m, yang sedang beroatsi dengam jarak r dari poros. Sebuah gaya F yang tegak lurus pada lintasan partikel memberikan percepatan tangen sial a_T sesuai persamaan :

$F = m.\ a_T$

karena : $a_T = \alpha\ .\ r$

maka : $F = m.\ \alpha\ .\ r$

Dengan mengalikan kedua rua dengan r didapat :

$rF = m.\ r^2.\ \alpha$

dimana :

rF adalah torsi gaya τ yang dihasilkan gaya F terhadap poros partikel

$m.\ r^2$ sebagai momen inersia I partikel sehingga :

$\tau = I, \alpha$

Contoh :

Sebuah batu gerinda 2 kg memiliki jari-jari 10 cm diputar pada 120 rad/s. Motor dipadamkan dan sebuah pahat ditekan ke batu dengan gaya tangen sial 2 N. Berapa lama waktu diperlukan untuk berhenti sejak gaya diberikan :

Penyelesaian :

Diketahui :

m = 2 kg

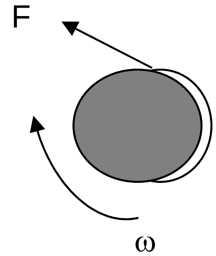
r = 10 cm = 0,1 m

F = 2 N

ω_0 = 120 rad/s

Ditanya : t ?

Jawab :



Pada saat gaya mesin dipadamkan bekerja gaya tangen sial F = 2 N, tang mengasilkan torsi τ, yang memberikan perlambatan sudut α, sehingga memberhentikan gerinda

Momen inersia silinder karena berbentuk pejal :

$$I = \frac{1}{2} m.r^2$$

$$= \frac{1}{2}(2)(0,1)^2$$

$$= 0,01 \text{ kg.m}^2$$

Torsi yang dihasilkan :

$$\tau = -rF$$

$$= -(0,1)(2)$$

$$= -0,20 \text{ m.N}$$

Torsi akan menghasilak percepatan sudut :

$$\tau = I.\alpha$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I}$$

$$= \frac{-0,2}{0,01}$$

$$= -20 \text{ rad/s}$$

diperlambat oleh percepatan sudut : -20 rad/s

Pergunakan persamaan gerak rotasi :

$$\omega_t = \omega_0 + \alpha.t$$

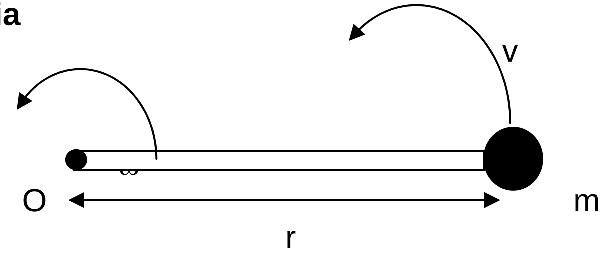
$$t = \frac{\omega_t - \omega_0}{\alpha}$$

$$= \frac{0-(120)}{-20}$$

$$= 6 \text{ s}$$

jadi butuh waktu 6 s sampai bantu berhenti

9.2. Momen Inersia



Perhatikan gambar diatas:
Jika batang diputar dan titik O ditetapkan sebagai titik poros, dan ujung lain dihubungkan dengan sebuah partikel dengan massa m, maka partikel m akan berotasi dengan kecepatan linier v .
Energi kinetik partikel adalah :

$$Ek = \frac{1}{2}.mv^2$$

Karena : $v = r.\,\omega$

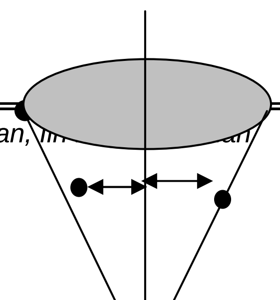
Maka :

$$Ek = \frac{1}{2}.mv^2$$
$$= \frac{1}{2}\,m\,.\,(r\,\omega)^2$$
$$= \frac{1}{2}\,(m.r^2)\,\omega^2$$

Karena kecepatan linier analog dengan kecepatan sudut, maka formula : $m.r^2$, analog dengan m yang dinamankan momen inersia. Jadi momen inersia adalah hasil kali massa partikel dengan kuadrat jarak partikel dari titik poros.

$$I = m.r^2$$

Kareana momen inersia pada gerak rotasi analog dengan massa pada gerak translasi, maka fungsi massa sama dengan fungsi momen inersia. Jika massa pada gerak translasi menyatakan ukuran kemampuan benda untuk mempertahahankan kecepatan liniernya, maka momen inersia benda pada gerak rotasi adalah kemampuan benda untuk mempertahankan kecepatan sudut rotasinya.



Poros rotasi

m_1 r_1

m_2 r_3 m_3

r_2

Sebuah benda tegar disusun oleh banyak partikel terpisah yang massanya masing-masing : $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$. Jika porosnya masing-masing adalah : r_1^2 , r_2^2 , r_3^2 , ….., r_n^2 . Maka momen inersianya adalah :

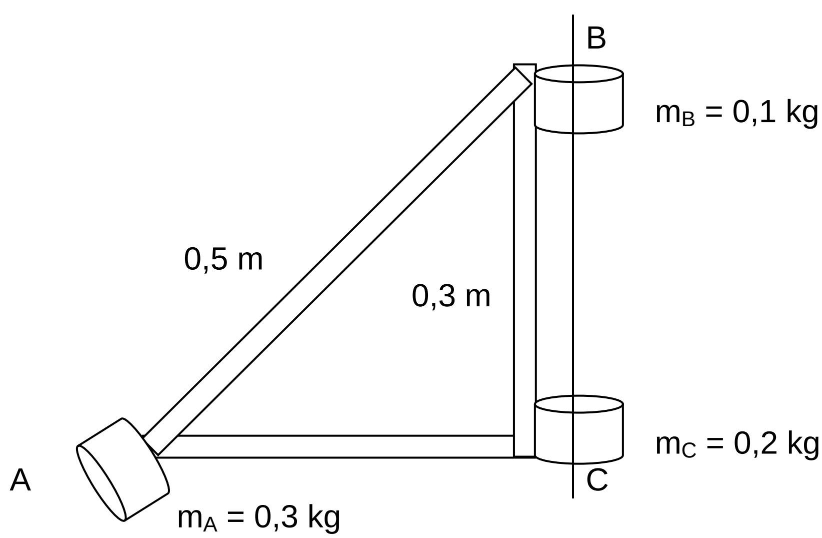
$$I = \Sigma\, m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots + m_n r_n^2$$

$$I = \sum_i m_i . r_i^2$$

Contoh :

1. Seorang mahasiswa teknik mesin mendesaian suatu bagian mesin yang terdiri dari tiga bagian penyambungan yang dihubungkan oleh tiga topangan. Ketiga penyambung dapat dianggap partikel yang dihubngkan oleh batang-batang ringan (lihat gambar). Hitunglah :
   a. Berapa momen inersia bagian mesin terhadap poros melalui A
   b. Berapa momen inersia terhadap oros yang bertepatan dengan batang BC?

Jawab :



a. Partikel A terletak pada poros sehingga jarak partikel ini terhadap poros A adalah nol (r_A = 0)

$AC^2 = AB^2 – BC^2$
$= (0,50)^2 – (0,3)^2$
$= 0,4$ m

jadi didapat :

$r_B = 0,5$ m
$r_C = 0,4$ m

sehingga :

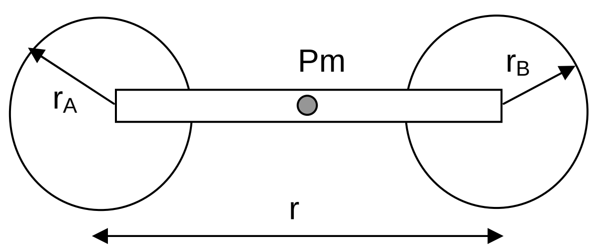
$I = \sum_i m_i . r_i^2$
$= m_A r_A^2 + m_B r_B^2 + m_C r_C^2$
$= (0,3)(0)^2 + (0,1)(0,5)^2 + (0,2)(0,4)^2$
$= 0,057$ kg.m^2

b. Tehadap poros BC, partikel B dan C terletak pada poros BC sehingga momen inersianya sama dengan nol. Jadi hanya partkel A yang mengasilkan momen dengan r_A = AC = 0,4 m

$I = \sum_i m_i . r_i^2$
$= m_A r_A^2$
$= (0,3)(0,4)^2$
$= 0.048$ kg.m^2

2. Tentukanlah momen inersia dari dua buah bola pejal identuk masing-masing dengan massa 5 kg, yang dihubungkan dengan tongkat tak bermassa yang panjangnya 1 m

Penyelaesaian :



Deketahui :

$m_1 = 5$ kg
$m_2 = 5$ kg
$r_1 = 0,5$ m
$r_2 = 0,5$ m

Ditanya : I ?

Jawab :

$$I = \sum_i m_i . r_i^2$$
$$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$
$$= (5)(0,5)^2 + (5)(0,5)^2$$
$$= 2,5 \text{ kg.m}^2$$

9.3. Jari-jari girasi

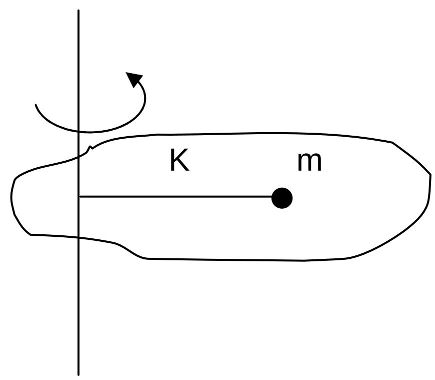
Jari-jari girasi adalah jarak radial dari sumbu putar kesuatu titik tempat massa benda dikonsentrasikan. Jika momen inersianya adalah :

$$I = m.K^2$$

Maka :

$$K = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

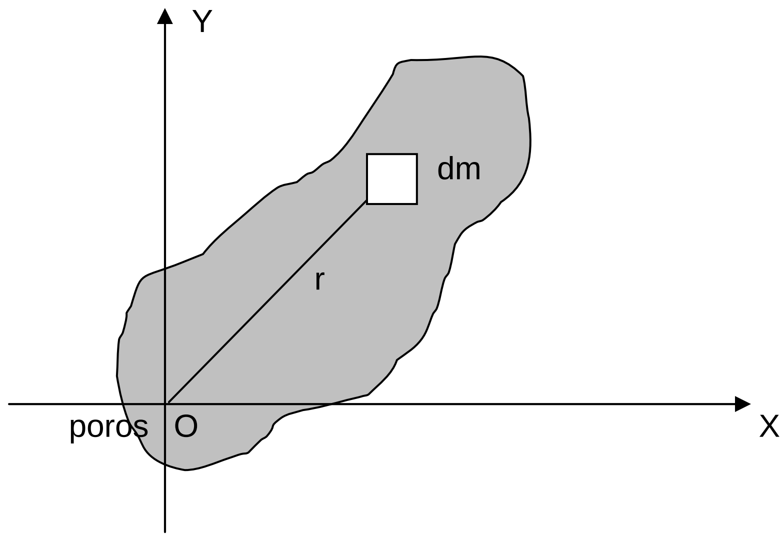
Dimana : K = jari-jari girasi
m = massa benda
I = momen Inersia



9.4. Perhitungan momen inersia untuk benda tegar yang kontiniu dan teratur

Jika suatu benda tegar tidak dapat ditampilkan dalam kumpulan partikel – partikel, melainkan merupakan ditribusi massa yang kontiniu, maka penjumlah dengan tanda sigma Σ, harus diganti dengan tanda integral ∫. Kita membagi benda dengan elemen massa kecel dm yang berjarak r dari poros rotasi (lihat gambar). Sehingga momen inersia :

$$I = \int r^2 . dm$$

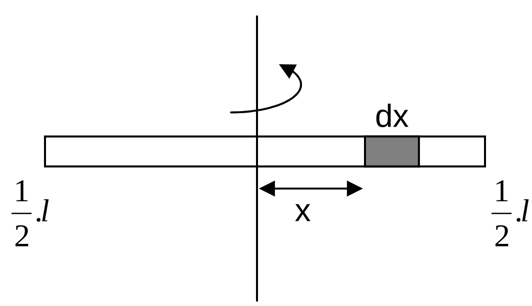


Untuk menghitung integral ini kita harus menyatakan r dan dm dalam peubah-peubah integral yang sama. Untuk suatu benda yang tidak terdiri dari titik-titik massa tetapi sutu distribusi materi yang kontiniu, penjumlahan dalam definisi momen inersia I = $\sum_i m_i.r_i^2$, biasanya dihitung dengan inegrasi I = $\int r^2.dm$.

Konsep momen inersia, bersama-sama dengan prinsip kerja energi pada umumnya sangat penting untuk menyelesaikan soal-soal benda tegar.

9.4.1. Batang

Sebuah batang dengan panjang l dan massa m, berputar melalui pusat massa. Ambil dm dengan panjang dx yang terletak sejauh x dari sumbu putar. Bila λ adalah rapat massa perstuan panjang maka :



m = $\lambda . l$

dm = λ. dx

I $= \int r^2.dm$

$= \int x^2.dm$

$= \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \lambda.x^2.dx$

$= 2\int_{0}^{\frac{l}{2}} \lambda.x^2.dx$

$= 2.\ \lambda.\ \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{l}{2}}$

$= 2.\ \lambda.\frac{1}{3}(\frac{1}{2}l)^3$

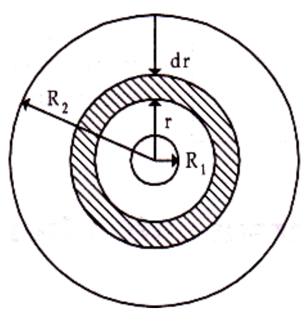
$= \frac{1}{12}\lambda.l^3$

karena : m = $\lambda.\ l$

maka :

I $= \frac{1}{12}.m.l^2$

9.4.2. Silinder berongga



Misal kan R_1 jari-jari dalam silinder, R_2 jari-jari luar, ρ rapat jenis cicin, jika daerah yang diarsir adalah dm yang berjari-jari r, lebarnya dr dan tebal t maka :

dm $= \rho.\ dV$

$= \rho.\ 2.\pi\ r.\ dr.t$

$= \rho.\ 2.\pi\ t.\ r\ dr$

m $= \pi\ \rho.\ t(R_2^2 - R_1^2)$

maka : I $= \int_{R_1}^{R_2} r^2.dm$

$= 2.\pi.\rho.t \int_{R_1}^{R_2} r^3.dr$

$= \frac{1}{2}\pi.\rho.t(R_2^4 - R_1^4)$

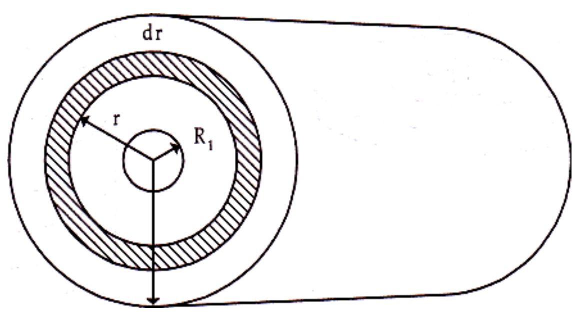
$= \frac{1}{2}\pi.\rho.t\ (R_2^2 - R_1^2)\ (R_2^2 + R_1^2)$

karena : m $= \pi\ \rho.\ t(R_2^2 - R_1^2)$

maka :

I $= \frac{1}{2}$ m. $(R_2^2 + R_1^2)$

9.4.3. Silinder berdinding tebal

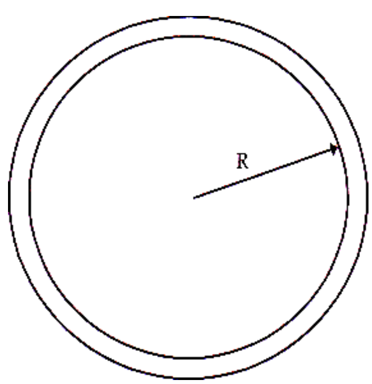


Silinder berdinding tebal adalah cicin tebal yang ditumpuk-tumpuk dengan jari-jari luar R_2 dan jari-jari dalam R_1, cara mencarinya sama dengan cincin tebal. Dimana harhga momen inersianya adalah :

I = $\frac{1}{2}$ m. $(R_2^2 + R_1^2)$

9.4.4. Cicin tipis

Cicin tipis adalah cicin tebal yang R_2 = R_1= R, sehingga momen inersianya adalah :



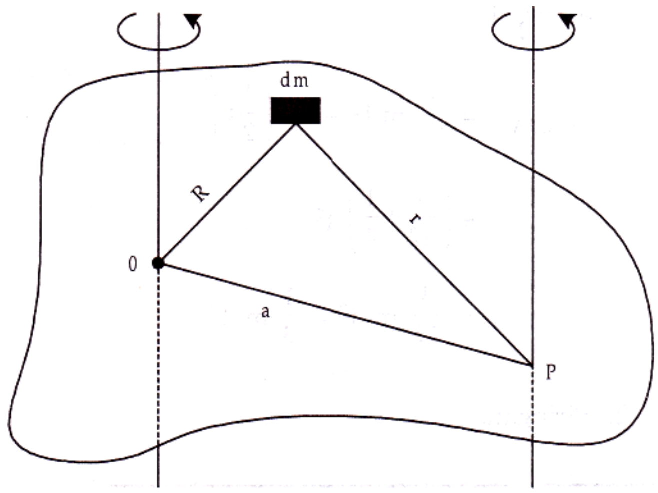
$$I = \frac{1}{2} m.\ (R_2^2 + R_1^2)$$
$$= \frac{1}{2} .m\ (2R^2)$$
$$= m.R^2$$

dengan cara yang sama dengan diatas maka didapatkan momen inersia untuk beberapa benda tegar kontiniu sebagai berikut :

No	**Nama benda**	**Momen Inersia**
1	Batang	$\frac{1}{12}.m.l^2$
2	Silinder berongga	$\frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2)$
3	Silinder berdinding tebal	$\frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2)$
4	Cicin tipis	$m.R^2$
5	Piringan	$\frac{1}{2} m.R^2$
6	Bola Kosong	$\frac{2}{3} m.R^2$
7	Bola Pejal	$\frac{2}{5} m.R^2$
8	Bola berkulit tebal	$\frac{2}{5}.m.\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}$

9.4.5. Dalil sumbu sejajar

Jika sumbu putar tidak terletak pada pusat massa, tapi sejajar dengan sumbu melalui pusat massa, maka momen inersia terhadap sumbu tersebut dapat dihitung. Dengan memisalkan Titik 0 adalah pusat massa dan P adalah titik yang berjarak a dari pusat massa. Buat sumbu putar melalui P dan sejajar dengan sumbu putar melalui O.



pilih dm yang berjarak R dari pusat massa O dan r dari P maka :

$r^2 \quad = R^2 + a^2 - 2 R a \cos \theta$

$I \quad = \int r^2.dm$

$= \int dm \,.\, (R^2 + a^2 - 2 R a \cos \theta)$

$= \int R^2\, dm + \int a^2\, dm - \int 2 R a \cos \theta\, dm$

$= I_{pm} + m.a^2 - \int 2 R a \cos \theta\, dm$

jika O memounyai koordinat (0,0,0) maka R cos θ adlah absis dari dm, jika OP = sumbu X , maka :

$\int 2 R a \cos \theta\, dm \quad = 2.a \int x.\, dx$

$x_{pm} \quad = 0$

$$= \frac{\int x.dm}{\int dm} = 0$$

maka :

$\int x.\, dm \quad = \quad 0$

sehingga :

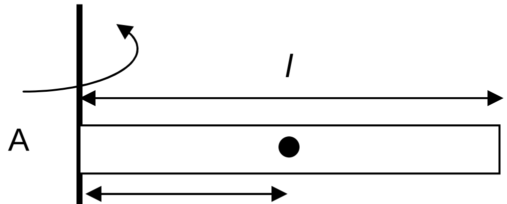
$2 R a \cos \theta\, dm \quad = \quad 0$

Momen inersianya :

$I_{Poros} \quad = I_{pm} + m.a^2$

Contoh :

1. Sebuah batang dengan massa m, dan panjang *l* mempunyai sumbu putar diujung batang A



$$a = \frac{1}{2}\ l$$

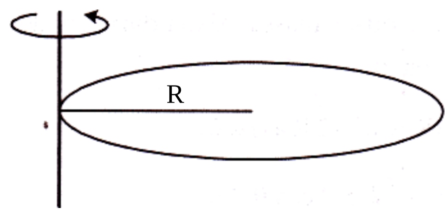
Jawab :

$$a = \frac{1}{2}\ l$$

$$I_{Poros} = \frac{1}{12} m.\ l^2 + m.\ (\frac{1}{2}\ l)^2$$

$$= \frac{1}{3}\ m.\ l^2$$

2. Sebuah piringan : dengan a = R



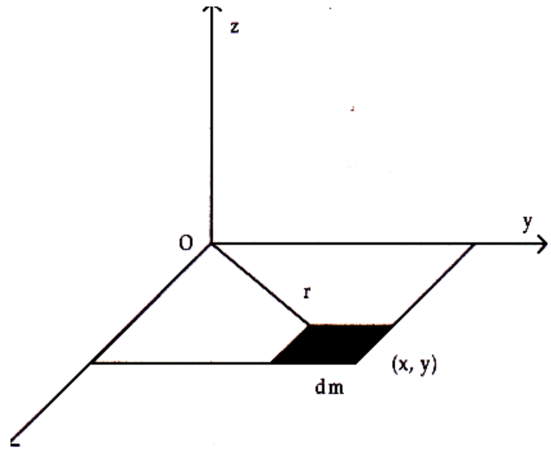
maka :

$$I_{Poros} = \frac{1}{2} m.R^2 + m.\ R^2$$

$$= \frac{3}{2}\ m.R^2$$

9.4.6. Dalil sumbu tegak lurus

Sumbu tegak lurus artinya sumbu putar yang tegak lurus pada sumbu melalui usat massa, dan tegak lurus pada penampang. Misal sumbu yang saling tegak lurus adalah sumbu-sumbu x, y, dan z. Buat dm yang berjarak r dari pusat sumbu putar, $r^2 = x^2 + y^2$



$$
\begin{aligned}
I_z &= \int dm\ r^2 \\
&= \int dm\ (x^2 + y^2) \\
&= \int dm\ x^2 + \int dm\ y^2 \\
&= I_x + I_y
\end{aligned}
$$

Contoh :

Sebuah piringan berjari-jari R mempunyai sumbu putar melalui diametarnya (sumbu x dan y)

Jadi :

$$
\begin{aligned}
I_Z &= 2 . Ix \\
&= 2 . I_y \\
&= \frac{1}{2} m.R^2
\end{aligned}
$$

maka

$$
\begin{aligned}
I_X &= I_Y \\
&= \frac{1}{4} m.R^2
\end{aligned}
$$

9.4.7. Hukum Newton untuk benda tegar

Selain untuk gerak translasi, hukum Newton juga berlaku untuk gerak rotasi sebagai berikut

Hukum Newton I:
Jika tak ada momen gaya luar yang bekerja pada sebuah benda tegar, maka tidak ada perubahan rotasi terhadap sumbu putar yang tetap.

Hukum Newton II:
Perubahan rotasi terhadap sumbu putar yang tetap berbanding lurus dengan momen gaya luar yang bekerja padanya dan arah perubahan ini sama dengan arah momen gaya.

Hukum Newton III:

Jika sebuah momen gaya dikerjakan oleh sebuah benda pada benda lain, maka sebuah momen gaya yang berlawanan arah dikerjakan pada benda kedua karena benda pertama terhadap sumbu putar yang sama. Dengan perkataan lain: perubahan momentum angular pada sebuah benda ($d\tau = I\frac{d\omega}{dt}$) mengakibatkan perubahan momentum angular yang sama tetapi berlawanan arah pada benda yang lain.

9.5. Hukum-hukum gerak benda tegar

Untuk gerak benda tegar kita kenal dua macam hukum kekekalan. Hukum-hukum kekekalan adalah:

1. Hukum kekekalan momentum angular
2. Hukum kekekalan energi mekanik

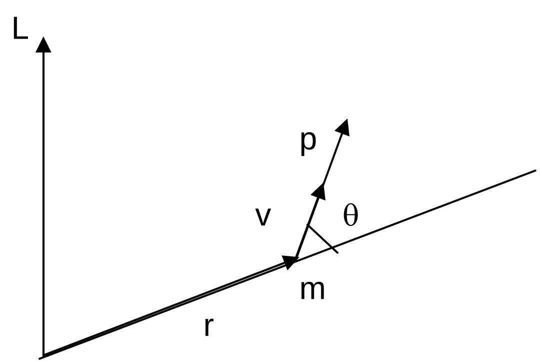
9.5.1. Momentum angular

Pada gerak translasi momentum linear sebuah benda adalah perkalian massa dan kecepatan linear (translasi) p = mv Pada gerak rotasi dikenal momentum angular dengan notasi L analog dengan p adalah perkalian momen inersia dan kecepatan angular.

L = I . ω
= r x p (sumbu putar melalui 0).
dalam hal ini I merupakan besaran skalar, karena benda berputar hanya pada satu sumbu.

p = mv

r = vektor posisi dari benda bermassa m



Momentum angular dinamakan juga momen dari momentum yaitu : r x p

L = m.v.r
= m r^2 ω
= I . ω

Untuk sistem benda titik:

L = $\Sigma\, m_i .v_i .r_i$

$= \Sigma\, m_i\, r_i^2\, \omega$

karena

$I = m_i\, r_i^2$

Maka

$L = I.\,\omega$

Jadi momentum angular adalah jumlah momen dari momentum linear jika sumbu putar sistem berimpit.

Dari persamaan gerak rotasi :

$\tau = I\,.\,\alpha$

atau

$$d\tau = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$= \frac{d(I\omega)}{dt}$$

$$= \frac{dL}{dt}$$

dengan τ adalah momen gaya luar yang bekerja pada sumbu yang tetap, $\frac{dL}{dt}$ menyatakan perubahan momentum angular per satuan waktu. Jika sumbu putar pada pusat massa maka :

$$\tau_{pm} = \frac{dL_{pm}}{dt}$$

pada umumnya :

$$\tau_{pm} = \frac{dL_{pm}}{dt}$$

$$\tau.dt = dL$$

$$\int \tau.dt = \int dL$$

$$\int_0^t \tau.dt = \int_{I_1.\omega_1}^{I_2.\omega_2} d(I.\omega)$$

maka :

$$\int_0^t \tau.dt = I_2\omega_2 - I_1\omega_1$$

$\int_0^t \tau.dt$: adalah impuls angular

$I_2\omega_2 - I_1\omega_1$: adalah perubahan momentuk angular

9.5.2. Energi Kinetik Rotasi

Pada sistem benda titik berlaku :

$E_{K\ sistem} = E_{K.pm} + E_{K.sistem}$ relatif terhadap pusat massa.

Faktor kedua dari ruas kanan adalah $E_{K.\ rotasi}$, karena gerak relatip disini adalah gerak rotasi. $E_{K.\ rotasi}$ pada sistem benda titik adalah:

$$
\begin{aligned}
E_{K.\ rotasi} &= \Sigma\ \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
&= \Sigma\ \frac{1}{2}\ m_i\ \omega^2 r_i^2 \\
&= \frac{1}{2} \Sigma\ m_i\ r_i^2 \omega^2 \\
&= \frac{1}{2} .I.\ \omega^2
\end{aligned}
$$

Analog dengan :

$$E_{K\ translasi} = \frac{1}{2} m.v^2$$

Momen inersia dinamakan inersia rotasi dan massa adalah inersia translasi. Massa tak tergantung pada letak sumbu putar, tapi momen inersia justru sangat tergantung pada letak sumbu putar. E_{Kpm}. adalah energi kinetik translasi. Jadi, jika sebuah benda melakukan gerak translasi dan rotasi bersama-sama, maka $E_K = E_{K.translasi.} + E_{K.rotasi}$. Energi kinetik dapat diperbesaf dengan cara memperbesar I atau ω.

Memperbesar momen inersia berarti memperbesar massa benda atau jarak ke sumbu putarnva Sebuah roda berjari-jari R, massa m mempunyai momen inersia $\frac{1}{2} mR^2$ (dianggap silinder)

Roda dengan momen inersia besar dapat digunakan untuk memperbesar $E_{K.\ rotasi}$. Roda seperti ini dinamakan roda gila.

9.5.3. Hukum Kekekalan momentum Angular

Hukum ini merupakan analog dengan hukum kekekalan momentum linear. Dari definisi : $\tau = \frac{dL}{dt}$, jika tak ada momen gaya luar ($\tau = 0$) berarti dL = 0 atau L tetap.

$I_o \omega_o = I\ \omega$, adalah hukum kekekalan momentum angular.

9.5.4. Hukum Kekekalan Energi Mekanik

Syarat berlakunya adalah tidak ada gaya luar yang bekerja pada sistem maka

$\Delta E_K = -\Delta E_P$

Untuk gerak rotasi momen gaya luar harus tidak ada merupakan syarat untuk berlakunya hukum kekekalan energi mekanis.

$\Delta E_K = \Delta E_{K\ translasi} + \Delta E_{K\ rotasi}$

E_P . tidak ada yang khusus untuk benda tegar

9.5.5. Daya

P = F.v (translasi)

Analog dengan

P = $\tau . \omega$ (rotasi)

$W_{rotasi} = \int \tau \, d\theta$ (kerja rotasi)

Contoh-contoh soal :

1. Sebuah mobil-mobilan yang mempunyai roda gila dapat berjalan lebih lama dari pada mobil-mobilan tanpa roda gila. Roda gila ini terdapat juga pada poros mesin bakar (misal, kopling).

2. Sebuah bola dengan massa 50 gr, diameter 2 cm menggelinding tanpa slip dengan kecepatan 5 cm/s. Hitunglah $E_{k\ total}$?
   Penyelesaian :
   Diketahui :
   m = 50 gr
   r = 1 cm
   v = 5 cm/s

Ditanya : $E_{k\ total}$?

Jawab :

Misalkan bola pejal

$$I = \frac{2}{5} m.r^2 = \frac{2}{5}(50)(1)^2 = 20 \text{ gr.cm}^2$$

$$E_{k\ total} = E_{K\ pm} + E_{K\ rotasi} = \frac{1}{2} m.v^2 + \frac{1}{2} I.\omega^2 = \frac{1}{2} m.v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}(50)(5)^2 + \frac{1}{2}(20)\frac{5^2}{1} = 625 + 250 = 875 \text{ erg}$$

3. Seorang berdiri di atas meja putar tepat di atas sumbunya dengan memegang beban bermassa sama pada kedua tangan, jika tangan direntangkan, meja berputar dengan kecepatan putar ω_o, sedangkan I sistem pada saat ini I_o, kemudian kedua tangan diturunkan kesisi badan, hingga beban-beban menjadi lebih dekat dengan poros putar maka I_o menjadi lebih kecil yaitu I, sedangkan ω_o akan menjadi lebih besar yaitu ω maka :
   $I_o \omega_o = I\ \omega$, konstan (hukum kekekalan momentum angular)

4. Seorang penari sepatu es memiliki momen inersia 4 kg.m^2, ketika kedua tangannya terentang dan 1,2 kg.m^2 ketika kedua tangannya merapat ketubuhnya. Penari mulai berputar dengan kecepatan sudut 1,8 putaran/detik ketika kedua tangannya terlentang, berapa kecepatannya sudutnya ketika kedua tangannya merapat ketubuh ?

   Penyelesaian :
   Diket :
   I_1 = 4 kg.m^2
   I_2 = 1,2 kg .m^2
   ω_1 = 1,8 putaran/s
   Ditanya : ω_2 ?
   Jawab :
   Hukum kekekalan momentum :

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{I_1.\omega_1}{I_2}$$

$$= \frac{(4).(1,8)}{1,2}$$

$$= 6 \text{ putaran.s}^{-1}$$

5 .Sebuah pintu lebarnya 1 m, massanya 15 kg, diberi engsel pada salah satu sisinya sehingga dapat berotasi tanpa gesekan terhadap sumbu tegak. Sebuah peluru dengan massa 10 gr dan kecepatan 400 m/s ditembakkan ke pintu dan penempel tepat ditengah-tengah pintu. Tentukanlah kecepatan sudut pintu setelah peluru menempel?

   Penyelesaian :
   Diketahui :
   m = 15 kg
   l = 1 m
   r = 0,5 m
   v_p = 400 m/s
   m_p = 10 gr

Ditanya : ω_{akhir} ?

Jawab :

Momentum sudut awal

$$L = m.v.r$$
$$= (0{,}001)(400)(0{,}5)$$
$$= 2\ kg.m^2.s^{-1}$$

Momen Inersia pintu :

$$I = \frac{1}{3} m.\ell^2$$
$$= \frac{1}{3}(15)(1)^2$$
$$= 5\ kg.m^2$$

Momen Inersia peluru :

$$I = m.r^2$$
$$= (0{,}01)(0{,}5)^2$$
$$= 0{,}0025\ kg.m^2$$

Hukum Kekekalan momentum sudut :

$$L = \omega\ \Sigma\ I$$
$$= \omega\ (I_{pintu} + I_{peluru})$$
$$\omega = \frac{L}{I_{pintu} + I_{peluru}}$$
$$= \frac{20}{5 + 0{,}0025}$$
$$= 0{,}4\ rad.s^{-1}$$

6. Suatu tali ringan yang lemas dililitkan beberapa kali sekeliling silinder pejal yang massanya 50 kg dan garis tengahnya 0,12 m, yang berotasi tanpa gesekan terhadap sumbu tetap yang mendatar. Ujung bebas dari tali ditarik dengan gaya tetap yang besarnya 9 N sejauh 2 m. Bila silinder mula-mula diam, tentukan kecepatan sudut akhir dan kecepatan akhir tali ?

Penyelesaian :

awab :

Karena tidak ada energi yang hilang karena gesekan maka :

Energi kinetik akhir silinder = kerja yang dilakukan gaya

$$\frac{1}{2} I\ \omega^2 = F.s$$

Untuk silinder :

$$I = \frac{1}{2}.m.r^2$$

$$= \frac{1}{2}(50)(0{,}06)^2$$
$$= 0{,}09 \text{ kg.m}^2$$

Maka :

$$\frac{1}{2} I\,\omega^2 = F.s$$
$$\frac{1}{2}(0{,}09)\,\omega^2 = (9)(2)$$
$$0{,}045.\,\omega^2 = 18$$
$$\omega^2 = \frac{18}{0{,}045}$$
$$\omega = 20 \text{ rad.s}^{-1}$$

Kecepatan akhir :

$$v = \omega\,,\,r$$
$$= (20)(0{,}06)$$
$$= 1{,}2 \text{ m.s}^{-1}$$

9.6. Gerak benda tegar

Benda tegar dapat saja melakukan gerak harmonik sederhana, angular adalah gerak harmonik sederhana yang disebabkan adanya momen (gaya) balik. Gerak-gerak lain adalah:

a. Translasi murni
b. Rotasi murni
c. Translasi dan rotasi (gabungan)

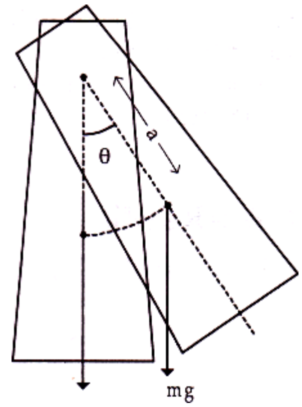
9.6.1. Gerak harmonik sederhana angular (ayunan fisis)

Ayunan fisis adalah benda tegar yang diayun (ayunan matematis adalah penyederhanaan ayunan fisis), berarti gerakannya adalah gerak harmonik sederhanan.

Poros putar berada pada jarak a dari pusat massa. Jika benda ini diberi simpangan θ dan dilepaskan maka karena adanya :

$$\tau = mga \sin \theta$$

maka terjadi gerak harmonik sederhana ini.



Maka $\tau = I\ \alpha$

$-m\ g\ a \sin\theta = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

untuk : θ <<<< 0 , sin θ = θ

maka :

$-m\ g\ a\ \theta = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{m.g.a.\theta}{I} = 0$

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2.\ \theta = 0$

maka :

$\omega = \sqrt{\dfrac{m.g.a}{I}}$

atau :

$P = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{m.g.a}}$

9.6.2. Ayunan Puntir

Piringan tipis dengan massa m digantungkan pada pusat massa dengan menggunakan kawat. Kalau piringan diberi simpangan, berarti kawat penggantung akan terpuntir dan jika dilepaskan, maka momen gaya yang menyebabkan puntiran, τ akan berbanding lurus dengan sudut puntiran θ.

Hukum Hooke untuk rotasi :

$\tau = -k.\ \theta$

$= I\ .\ \alpha$

$= I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$= - K.\theta$ (dimana K = konstanta puntiran)

maka :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K.\theta}{I} = 0$$

$\dfrac{\frac{d^2\theta}{dt^2}}{\theta}$ adalah kecepatan sudut : ω^2

maka

$$\omega^2 = \frac{K}{I}$$

$$\omega^2 = (2.\pi.f)^2$$

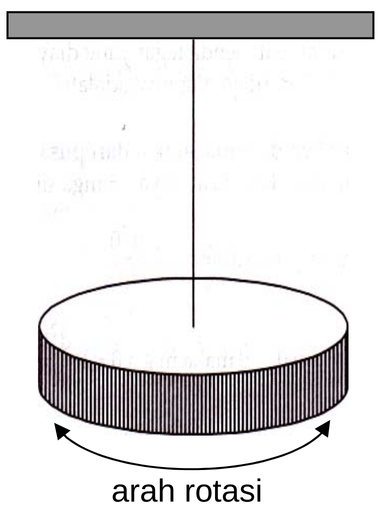
$$= (\frac{2.\pi}{P})^2$$

jadi :

$$(\frac{2.\pi}{P})^2 = \frac{K}{I}$$

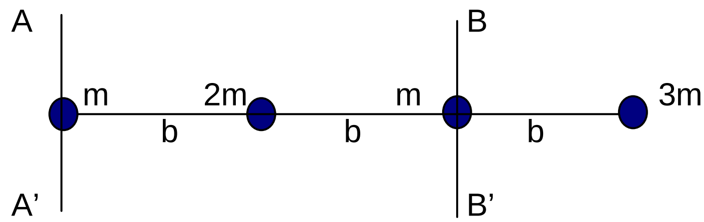
maka :

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$



Soal – soal :

1. Empat buah partikel seperti gambar, dihubngkan oleh sebuah batang ringan yang massanya dapat diabaikan , tentukanlah momen inersia system partikel terhadap poros : sumbu AA' dan BB'



2. Pada sebuah roda dengan momen inersia 6 kg.m^2, dikerjakan torsi konstan sebesar 51 m.N . Berakah :
   a. percepatan sudutnya?
   b. Berapa lama di perlukan sampai mencapai kecepatan 88,4 rad/s
   c. Berapa energi kinetik pada kecepatan ini?

3. Sebuah silinder pejal mengelinding dari keadaan diam menuruni sebuah bidang miring dengan ketinggain 1,4 m . Tentukan kecepatan linier silinder di dasar bidang miring (g=10 m/s^2)
4. Sebuah truk dengan massa 10 ton bergerak dengan kecepatan 6,6 m/s. Jari-jari setiap roda 0,45 m, massa roda 100 kg, jari0jari girasi 30 cm. Hitunglah energi kinetik dari truk
5. Sebuah batang homegen tergantung lurus kebawah, panjang 1 m dan massa 2,5 kg diberi engsel diujung atasnya. Diujung bawah diberi pukulan dengan gaya harisontal 100 N selama 0,02 s. Tentukanlah :
   a. momen angular dari batang
   b. apakah batang dapat mencapai posisi vertical keatas?
6. Suatu roda yang sedang berputar mengalami momen gaya 10 N m kaeran gesekan sumbu putarnya. Jari-jari roda 0,6 m, massa 100 kg dan sedang berputar dengan kecepatan 175 rad/s. Berapa lama roda akan berhenti ? berapa putaran sampai roda berhenti ?
7. Sebuah silinder dengan massa 20 kg berjari-jari 0,25 m berputar terhadap poros pusat massa dengan kecepatan 1200 rpm. Berapa gaya tangensial yang diperlukan untuk menghentikannya setelah 1800 rpm?
8. Sumbu kedua roda depan dan sumbu kedua roda belakang sebuah truk yang bermassa 3 ton berjarak 3 m. Pusat massa truk terletak 2 m di belakang roda depan. Jika g = 10 m/s^2, berapakah beban yang dipikul oleh kedua roda depan truk?
9. Seorang penari balet berputar 3 putaran perdetik dengan kedua lenagnnya direntangkan. Pada saat itu momen inersinya 8 kg.m^2, Kemudian lengannya dirapatkan sehingga momen inersianya berubah menjadi 2 kg.m^2. Berapakah frekwensi putaran sekarang?

10. Dua buah benda bergerak seperti pada gambar. Besar momentum sudut total terhadap titik asal O adalah ?